**Ricerca Operativa**

Un vettore y è **combinazione lineare** dei vettori x1, x2, …, xn se esistono λ1, λ2, …, λn scalari tali che:

y = λ1x1 + λ2x2 + … + λnxn*.*

Un vettore y è **combinazione conica** dei vettori x1, x2, …, xn se esistono λ1, λ2, …, λn scalari tali che:

1. λ1, λ2, …, λn ≥ 0;  
2. y = λ1x1 + λ2x2 + … + λnxn*.*

Un vettore y è **combinazione convessa** dei vettori x1, x2, …, xn se esistono λ1, λ2, …, λn scalari tali che:

1. λ1, λ2, …, λn ≥ 0;  
2. λ1 + λ2 + … + λn = 1;  
3. y = λ1x1 + λ2x2 + … + λnxn.

I vettori x1, x2, …, xn si dicono **linearmente indipendenti** se:

λ1x1 + λ2x2 + … + λnxn = 0 ⇒ λ1 = λ2 = … = λn = 0.

I vettori x1, x2, …, xn si dicono **linearmente dipendenti** se esistono λ1, λ2, …, λn non tutti nulli, tali che:

λ1x1 + λ2x2 + … + λnxn = 0.

Oppure, se uno di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri. x1T = , x2T = , x3T = ⇒ x1 + x2 = x3.

Un insieme di vettori x1, x2, …, xk di dimensione *n* **genera** l’insieme di vettori *En* se ogni vettore in *En* può essere rappresentato come combinazione lineare dei vettori x1, x2, …, xk. Quindi, *En* è detto ***spazio generato***.

**Def.** Un insieme x1, x2, …, xk in *En* è una **base** di *En* se valgono le due seguenti condizioni:

1. x1, x2, …, xk generano *En*;  
2. se uno solo dei vettori è rimosso, allora i rimanenti *k-1* vettori non generano *En*.

Alternativamente, è possibile utilizzare la seguente proprietà.  
**Proprietà.** Un insieme di vettori x1, x2, …, xk in *En* è una base di *En* se e solo se:

1. k = n;  
2. x1, x2, …, xk sono ***linearmente indipendenti***. (colonne delle variabili in base)

**Def.** Il numero di vettori che formano una base per *En* è detto **dimensione** dello spazio *En*.

Per trovare una base per E2 si devono cercare 2 vettori in E2 linearmente indipendenti. Siano x1T = , x2T = , x3T = .

1) Essi generano ℝ2, anche se essi sono 3 e non 2, possiamo porre λ3 = 0, e lavorare solo sui vettori x1T e x2T; tramite combinazione lineare di questi due vettori possiamo rappresentare qualsiasi vettore in ℝ2.

2) Essi non sono una base in ℝ2 in quanto per esserlo deve avere esattamente 2 vettori linearmente indipendenti, ma in questo caso ne sono 3. Infatti, essi non sono linearmente indipendenti in quanto x3T può essere espresso come combinazione conica di x1T e x2T.

3) x1T e x2T sono, presi singolarmente, una base in ℝ2, oppure, x2T e x3T sono, presi singolarmente, una base in ℝ2.

5) Sia x4T = . Allora x2T e x4T non sono una base in ℝ2, dato che essi non sono linearmente indipendenti.

Sia *A* una matrice quadrata di *n* righe ed *n* colonne, allora se esiste una matrice quadrata *B* di *n* righe ed *n* colonne tale che *AB* = *I* e *BA* = *I*, allora *B* è detta **matrice inversa** di *A*. Occorre ricordare che:

- l’inversa di una matrice A (se esiste) è unica, ed è indicata con A-1;  
- se una matrice ammette l’inversa, allora essa è detta matrice *non singolare*;  
- una matrice quadrata è non singolare se e solo se le righe sono linearmente indipendenti o se e solo se le colonne sono linearmente indipendenti.

Il **determinante** di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche, si calcola, fissata una riga *i*, con la formula:  
dove *minor(Aij)* è il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellando la *i*-esima riga e la *j*-esima colonna di A.

Il determinante di una matrice A (2x2) si calcola effettuando la differenza tra il prodotto dei termini sulla diagonale principale e il prodotto dei termini sulla diagonale secondaria, cioè (a11∙a22) – (a12∙a21).

**Es.** *A* = ⇒ det(A) = (-1)1+1 ∙ a11 ∙ minor(A11) + (-1)1+2 ∙ a12 ∙ minor(A12) + (-1)1+3 ∙ a13 ∙ minor(A13) =

= (-1)2 ∙ 2 ∙ det + (-1)3 ∙ 1 ∙ det + (-1)4 ∙ 1 ∙ det = 2∙5 + (-1) ∙ (-3) +1 ∙ (-1) = = 12.

Il calcolo del determinante è importante, in quanto:

- se il determinante è diverso da 0, allora la matrice **è invertibile** ed esiste la matrice inversa.

Significa che le colonne e le righe di tale matrice sono linearmente indipendenti;

- se il determinante è uguale a 0, allora la matrice non è invertibile.

Una volta calcolato il determinante, si vuole calcolare la matrice inversa A-1. La formula è la seguente, dove il :  
cioè, il rapporto tra la *matrice trasposta dei cofattori* ed il determinante di A.

**Teorema:** *Data una qualsiasi matrice, il rango per righe e per colonne coincide.*  
Implica che, data una matrice A di *m* righe ed *n* colonne, Rango(A) ≤ min(m, n). Quindi, se rango(A) = min(m, n), allora A è detta matrice *a rango pieno*.

La seguente regola consente di calcolare in modo rapido l’inversa di una matrice *A* 2x2:

**Problemi di programmazione matematica**

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare (PL) con m vincoli ed n variabili in **forma canonica di minimo** (***Teoria della Dualità***):  
 min z = cTx  
 Ax ≥ b  
 x ≥ 0  
 x ∈ ℝn.  
Si ha un problema di minimo con valore z che la funzione obiettivo assume nel punto x, tutti i vincoli sono di maggiore o uguale, ed abbiamo x ≥ 0.  
- x è il vettore nx1 delle **variabili decisionali**, dove il numero di tali variabili (n) dipende dal problema;  
- c è il vettore nx1 dei **coefficienti di costo** della funzione obiettivo, cioè i coefficienti delle variabili x all’interno della funzione obiettivo;  
- b è il vettore mx1 dei **termini noti** dei vincoli, dove il numero di tali vincoli (m) dipende dal problema;  
- A è la matrice mxn dei **coefficienti tecnologici** dei vincoli (A = [aij], i = 1, …, n; j = 1, …, m).

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare (PL) con m vincoli ed n variabili in **forma standard di minimo**:  
 min z = cTx  
 Ax = b (1)  
 x ≥ 0 (2)  
 x ∈ ℝn.  
Questa forma è l’input preteso dal ***Simplesso*** per trovare la soluzione ottima. Il problema deve essere di minimo, tutti i vincoli devono essere di uguaglianza e le variabili decisionali devono essere tutte non-negative, infine, il vettore b deve essere sempre maggiore o uguale a 0.  
- I valori di x che soddisfano i vincoli (1) sono detti **soluzione** del problema del PL;  
- i valori di x che soddisfano anche i vincoli (2) sono detti **soluzioni ammissibili** del problema di PL.

**Condizione: b ≥ 0**

Si assumono soddisfatte le seguenti ipotesi:  
 • m < n (più variabili che vincoli)  
 • m = rango(A).

Il sistema di equazioni lineari (1) può ammettere una soluzione unica se m=n, oppure può ammettere∞n-m soluzioni se m < n.

Dato un problema di programmazione lineare, un vettore x’ di ℝn:  
 - **soddisfa** il vincolo gi(x) ≥ bi se gi(x’) ≥ bi, cioè se andando a sostituire i valori delle componenti di x’ il vincolo è soddisfatto;  
 - **viola** il vincolo gi(x) ≥ bi se gi(x’) < bi;  
 - **satura** (o *rende attivo*) il vincolo gi(x) ≥ bi se gi(x’) = bi.  
Un vettore x di ℝn si dice **soluzione ammissibile** per il problema di PL se e solo se soddisfa tutti i vincoli del problema.

Un problema di programmazione lineare risulta:  
 1. **Inammissibile** se la regione ammissibile è vuota, ossia X = ∅.   
 2. **Illimitato** (inferiormente) se, scelto un qualsiasi scalare k, esiste sempre un punto x ∈ X tale che f(x) < k. Il valore della soluzione ottima del

problema è -∞ se sto minimizzando e +∞ se sto massimizzando; inoltre, se l’ottimo del problema è illimitato, non esiste un punto di ottimo;  
 3. **Ammettere soluzione ottima finita** se esiste un punto x\* ∈ X tale che f(x\*) ≤ f(x) per ogni x ∈ X. La funzione f, nel punto x\*, è minore o uguale

alla stessa funzione in un qualsiasi altro punto della regione. Per quest’ultimo vanno distinti due casi:

1) quando si ha **unico punto di ottimo**;  
 2) quando si hanno **infiniti punti di ottimo**.

Avere ***infiniti punti di ottimo*** è diverso da avere una soluzione ammissibile con valore ***ottimo illimitato***. Infatti, nel primo caso si ha che nella regione ammissibile esistono infiniti punti in cui la funzione assume il valore ottimo; invece, nel secondo caso non esiste un punto di ottimo finito, giacché è ±∞ a seconda se sto massimizzando o minimizzando.

**Def.** Un punto x\* ∈ X è un **ottimo globale** per la funzione f(x) se e solo se: f(x\*) ≤ f(x) ∀x ∈ X.  
Quindi, l’ottimo globale indica che, tra gli infiniti punti della regione ammissibile, esso è il punto in cui la funzione assume il valore minimo.  
**Def.** Un punto x’ ∈ X è un **ottimo locale** per la funzione f(x) se e solo se: f(x’) ≤ f(x) ∀x ∈ N(x’, ε), con ε > 0.  
Quindi, l’ottimo locale indica che, ottenuta una soluzione nel punto x’, ci sarà un insieme di punti xi (i = 1, 2, …) nell’intorno di x’ tale che la funzione f(xi) è più grande o al più uguale a f(x’). Dunque, localmente, quella è la migliore soluzione possibile.

**Def.** Un insieme X è **convesso** se e solo se, dati due punti x, y ∈ X, ogni punto w generato come loro combinazione convessa (, con λ ∈ [0, 1]) è tale che w ∈ X.  
Geometricamente, la combinazione convessa di due vettori in ℝ2 corrisponde ai punti della retta che unisce i vertici dei due vettori.

- L’insieme X = {x | Ax = b} è un insieme convesso.  
DIM. Se x’ ∈ X, allora Ax’ = b. Analogamente, se x’’ ∈ X, allora Ax’’ = b.  
Sia , con λ ∈ [0, 1]. Allora .

**Def.** Un **poliedro** è l’intersezione di un numero finito di semispazi.  
Ciò implica che un poliedro X è un insieme convesso. Un poliedro può essere chiuso e limitato (**politopo**) o illimitato (**poliedro illimitato**).

**Def.** Una funzione f(x) si dice **convessa** su insieme X se, presi comunque due punti x1, x2 ∈ X risulta che:   
, con λ ∈ [0,1].  
**Teorema** (**FUNZIONE CONVESSA**)**.** *Una funzione lineare del tipo cTx è una funzione convessa.*  
DIM. Dalla definizione di funzione convessa, sostituendo la f(x) con cTx si ha:  
- ;  
- .  
I due precedenti risultati sono uguali. Poiché , la funzione cTx è convessa.

**Punti e Direzioni estreme. Teorema della rappresentazione**

**Def.** Un punto di un poliedro X è un **punto estremo** se e solo se non può essere espresso come combinazione convessa STRETTA di altri punti di X.  
Geometricamente, questa definizione afferma che se prendiamo due punti qualsiasi in X, il vertice non si trova sulla retta che congiunge i due punti:

.

**Teorema** (**PROPRIETÀ DEI PUNTI ESTREMI DI UN POLIEDRO LIMITATO**)**.** Dato un poliedro X non vuoto e limitato con punti estremi x1, x2, …, xk, ogni punto y ∈ X può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X, cioè

**Def.** Un **raggio** R di vertice x0 e di direzione d è un insieme di punti della forma R = {x0 + λd | λ ≥ 0}.  
Informalmente, x0 + λd è la semiretta che parte dal punto x0 e si sposta all’infinito lungo il vettore d.

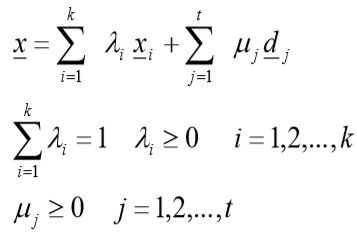
**Def.** Dato un poliedro X, il vettore d è una **direzione** di X se e solo se, per ogni punto x0 ∈ X, il raggio x0 + λd (con λ ≥ 0) appartiene a X.

Di seguito è posto il procedimento algebrico per calcolare le direzioni di un poliedro.  
Quindi, le direzioni d del poliedro X sono tutti e soli i vettori tali che:

Il raggio, al variare di λ all’infinito, deve comunque rimanere all’interno della regione, quindi deve soddisfare tutti i vincoli del poliedro.

**Def.** Un **cono convesso** C è un insieme convesso tale che se x ∈ C allora anche λx ∈ C ∀λ≥0.  
Un cono convesso è un insieme convesso che contiene raggi che partono dall’origine, in quanto possiamo scegliere λ = 0 per azzerare il vettore x. Inoltre, possiamo scegliere 0 < λ < 1 per diminuirne il modulo.  
Solo alcuni raggi sono sufficienti (detti ***raggi estremi***), perché gli altri sono espressi come combinazione conica di questi.  
**Def.** Una direzione d di un poliedro X, è una **direzione estrema** di X se e solo se non è esprimibile come combinazione conica di altre direzioni di X.

**Teorema** (**DI RAPPRESENTAZIONE DI POLIEDRI**)**:** Dato un poliedro X non vuoto con punti estremi xi (con i = 1, …, k) e direzioni estreme dj (con j = 1, …, t), ogni punto x ∈ X può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X e combinazione conica delle sue direzioni estreme:



Infatti:

Considerando prima (se stiamo *minimizzando*):  
- per ogni j = 1, …, t, se esso è ≥ 0, allora , il che implica che cancelliamo la seconda sommatoria (cioè, non ha ottimo illimitato);  
- se esiste < 0, allora , il che implica che la soluzione ottima è Z\* = -∞.  
Se eliminiamo la seconda sommatoria, ci concentriamo sulla prima.  
Considerando prima (se stiamo *massimizzando*):  
- se esso è > 0, allora , il che implica che la soluzione ottima è Z\* = +∞;  
- se esso è ≤ 0, allora , il che implica che cancelliamo la seconda sommatoria (cioè, non ha ottimo illimitato).  
Se eliminiamo la seconda sommatoria, ci concentriamo sulla prima.

**Soluzioni di base ammissibili, teorema fondamentale della PL**

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare (PL) con *m* vincoli ed *n* variabili in **forma standard**:  
Poiché m = rango(A) ed m < n, si può partizionare A come **A = [AB | AN]**, dove:  
- *AB* è una matrice non singolare mxm (det(AB) ≠ 0, per cui questa matrice è una base di ℝm);  
- *AN* è una matrice mx(n-m).  
La matrice AB è composta da m colonne linearmente indipendenti di A. Tali colonne (viste come vettori) sono quindi una base dello spazio vettoriale ad m dimensioni delle colonne di A. La matrice AB è detta **matrice di base**.  
In corrispondenza di una scelta di AB ed AN si può partizionare anche il vettore delle x:  
Il vettore xB è detto **vettore delle variabili in base** (o “vettore di base”).  
Il vettore xN è detto **vettore delle variabili fuori base**.

Una scelta importante è porre xN = 0 da cui si ottiene che rappresenta una **soluzione di base**, associata ad una base di ℝm.  
Se , allora si ottiene una **soluzione di base ammissibile**.

**Teorema.** Dato insieme convesso, dove A è una matrice mxn di rango m (con m < n), xe è un punto estremo di X se e solo se xe è una soluzione di base ammissibile.  
Tra le infinite soluzioni del poliedro, si individua una soluzione di base ammissibile perché i vertici del poliedro corrispondono alle soluzioni di base ammissibili. Sono dette **soluzioni degenere** se almeno una variabile xBi in base è uguale a 0.

**Teorema** (**FONDAMENTALE DELLA PL**)**.** Dato un problema di PL in forma standard, dove A è una matrice mxn con rango(A) = m ed m < n, allora:

1. esiste una soluzione ammissibile ⇔ esiste una soluzione ammissibile di base;  
2. esiste una soluzione ottima finita ⇔ esiste una soluzione ottima finita che è anche di base.

Il punto 2 afferma che se esiste all’interno della regione ammissibile un punto di ottimo, allora esisterà anche una soluzione di base ammissibile dove la funzione obiettivo assume il valore ottimo: algoritmicamente, mi devo concentrare *solo sulle soluzioni di base ammissibili del problema*.

**Metodo del simplesso: condizioni di ottimalità e di illimitatezza**

Consideriamo il problema di PL in Forma Standard  
min z = cTx  
 Ax = b  
 x ≥ 0  
 x ∈ ℝn.Data una base B ammissibile, riscriviamo il problema in funzione di B come segue:  
dove: , , , .

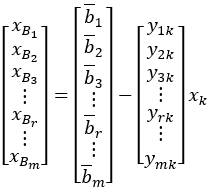
**Condizione: b ≥ 0**

**Teorema** (**CONDIZIONE DI OTTIMALITÀ**)**.** Una soluzione di base non degenere di un problema di PL è ottima se e solo se:

(***vettore delle variabili in base***) (***coefficienti di costo ridotto***)

Il **metodo del gradiente** sceglie la variabile fuori base xk che localmente fa aumentare più rapidamente l’obiettivo:

Determinata la variabile fuori base xk da portare in base, si deve scegliere la variabile uscente. Esistono due alternative:



a) , si nota che **la soluzione del problema è illimitata** (non esiste un punto di ottimo). In questo caso facendo aumentare xk il valore di nessuna variabile di base diminuisce: per qualsiasi valore di xk;  
b) , ed in questo caso la soluzione di base non è ottima, e bisogna quindi passare alla base successiva.

**INPUT**: Problema di PL (in forma standard) e una soluzione di base ammissibile.

**1. Test di ottimalità**:  
 Se , allora la soluzione corrente è ottima e l’algoritmo termina.  
 Altrimenti andare al passo 2.  
**2. Scelta della variabile entrante in base**:  
 Scegliere una variabile fuori base xk tale che ed andare al passo 3.  
**3. Test di illimitatezza**:  
 Se , allora la soluzione del problema è illimitata (non esiste ottimo finito), e l’algoritmo termina.  
 Altrimenti vai al Passo 4.  
**4. Scelta della variabile uscente dalla base (Test dei minimi rapporti)**:  
 Scegliere la variabile xr tale che .  
 xr è la variabile uscente e la variabile entrante xk assume valore pari a .  
**5. Aggiornamento della base:** Aggiornare gli indici delle variabili in base (B) e quelli delle variabili fuori base (N). Tornare al passo 1.

**Metodo delle due fasi e Big-M**

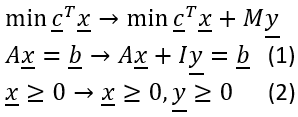
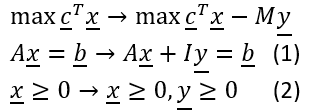
Utilizzare il **metodo delle due fasi** per costruire “*artificialmente*” la matrice identità; si modifica il sistema dei vincoli come segue,  
con l’aggiunta di una variabile artificiale yi ad ogni vincolo del sistema. Nel nuovo sistema sarà presente una matrice identità (associata alle y).

Una soluzione (x’, y’) del nuovo sistema sarà soluzione anche del sistema di partenza *se e solo se y’ = 0*. Per ottenerla si risolve:

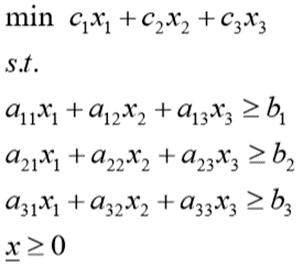
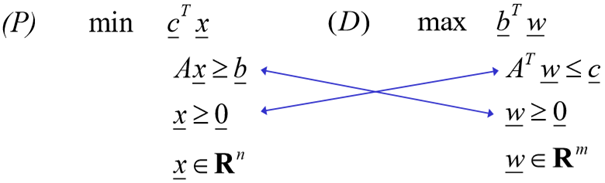
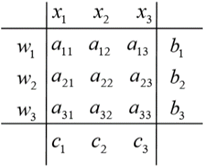
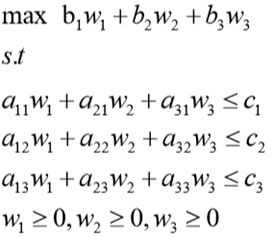
Alla fine della prima fase possono verificarsi due casi, per l’ottimo della funzione obiettivo:  
**1.** una variabile artificiale è maggiore di 0. Questo implica che *non ammette soluzione*. Non si passa alla seconda fase;

DIM. Supponiamo per assurdo che , con . Costruito il vettore , notiamo che esso è una soluzione ammissibile. Questo ci consente di costruire una soluzione ammissibile nel nuovo sistema, dove , ma questo è assurdo in quanto avevamo supposto .  
**2.** : *ammette soluzione* (a meno di soluzioni degeneri). Si passa alla seconda fase e si risolve il problema iniziale utilizzando la base ottima della prima fase come base iniziale della seconda fase.

Il **metodo del Big-M**, alla funzione obiettivo originale vengono sommate le variabili artificiali *moltiplicate per un coefficiente M* molto grande.

**Teoria della Dualità**

Siano dati il problema primale **di minimo** ed il suo duale di massimo .  
**Teorema** (**DEBOLE DELLA DUALITÀ**)**.** Siano e soluzioni ammissibili rispettivamente per (P) e (D). Allora DIM. Sappiamo che è una soluzione ammissibile di (P), quindi . (1)

E sappiamo che è una soluzione ammissibile di (D), essa soddisfa il vincolo , che implica . (2)  
Poiché , possiamo premoltiplicare (1) per , ottenendo . (3)  
Infine, sfruttando le disequazioni (2) e (3), sapendo che si può premoltiplicare (3) per , ottenendo che:

**Corollario 1.** Se x è una soluzione ammissibile per il primale (P) e w una soluzione ammissibile per il duale (D) tali che , allora x e w sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi.  
DIM. Supponiamo per assurdo che ; siccome vale quest’ultima uguaglianza, allora : questo è un assurdo, poiché va contro la tesi del Teorema debole della dualità.

**Corollario 2.** Se il problema primale (P) è illimitato inferiormente, allora il duale (D) è inammissibile. Viceversa, se il duale (D) è illimitato superiormente, allora il primale (P) è inammissibile.  
DIM. Supponiamo che il valore ottimo del primale (P) sia e che il problema duale ammetta una soluzione w. Dal teorema della dualità debole si ha che per una qualsiasi soluzione ammissibile x di (P), dove è uno scalare. Questo implica che : questo è assurdo.

**Teorema** (**FORTE DELLA DUALITÀ**)**.** Data una coppia di problemi primale-duale, (P) e (D), se uno dei due problemi ammette una soluzione ottima finita, allora anche l’altro problema ammette una soluzione ottima finita ed i valori ottimi delle funzioni obiettivo coincidono, DIM. Sia x\* la soluzione ottima del primale, e sia B la base ad esso associata:  
Sia ; vogliamo dimostrare che questo vettore è una soluzione ammissibile (1) ed ottima (2) per (D).   
(1) Dal duale, il vincolo che dev’essere soddisfatto è che .

(2) Il valore della funzione obiettivo duale in è . Dal Corollario 1 del teorema della dualità debole sappiamo che, essendo , anche è ottima.

Dal teorema della dualità forte ricaviamo che, data la base ottima B del primale, è possibile calcolare velocemente la soluzione ottima del duale (D) tramite l’equazione:

Riassumendo:  
- (P) è illimitato ⇒ (D) non è ammissibile;  
- (P) ha soluzione ottima finita ⇔ (D) ha soluzione ottima finita (ed i valori delle loro f.o. coincidono);  
- (P) è inammissibile ⇒ (D) illimitato o inammissibile.

**Teorema** (**DEGLI SCARTI COMPLEMENTARI**)**.** Data la coppia di soluzioni x e w rispettivamente ammissibili per (P) e (D), x e w sono ottime per (P) e (D) se e solo se  
dove è la j-esima colonna di A, e è la i-esima colonna di A.

**Analisi sensitiva**

Le variabili duali w rappresentano i “**prezzi ombra**”, ovvero i prezzi minimi a cui bisogna vendere le risorse per mantenere invariato il valore ottimo della funzione obiettivo. I **prezzi ombra** sono validi fino a quando non viene cambiata la base ottima (quando ciò avviene devono essere ricalcolati). Quando un vincolo è attivo, la risorsa ad esso associata è scarsa. La variabile duale corrispondente, a meno di degenerazione, sarà diversa da zero. Se invece la risorsa è abbondante sicuramente la variabile duale ad essa associata è nulla.

Caso 1: **variazione nel vettore dei costi c***.* Data una soluzione di base ottima x\* (sia B la base associata a tale soluzione), supponiamo che il coefficiente di una delle variabili sia cambiato da ck a ck’. L’effetto di questo cambio si ripercuoterà sui coefficienti di costo ridotto. Bisogna considerare due casi:  
caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo relativo ad una ***variabile non in base***;  
caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo relativo ad una ***variabile in base***.

Caso 2: **variazione del termine noto di un vincolo***.*

In sintesi, il caso 1 influisce **sull’*ottimalità*** della soluzione, mentre il caso 2 influisce **sull’*ammissibilità*** della stessa.

**Teoria dei grafi**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Problema del Flusso a Costo Minimo**, sia G un grafo connesso ed orientato in cui:  - xij = quantità di flusso sull’arco (i, j); - cij = costo di trasporto di un’unità di flusso sull’arco (i, j); - bi = intero associato al nodo i:  se bi > 0: nodo offerta  se bi < 0: nodo domanda  se bi = 0: nodo di passaggio  Bisogna far giungere la merce prodotta (dai nodi di offerta) alle destinazioni (nodi di domanda) minimizzando i costi di trasporto. | | |  |
| **Problema del Trasporto** è un *caso particolare* del *problema del flusso a costo minimo*, in quanto si hanno solo nodi di offerta e nodi di domanda.  L’unico cambiamento sono i vincoli (1) per i fornitori e (2) per i clienti.  Se si considera un nodo di offerta (fornitore) non si hanno archi entranti, per cui la sommatoria è nulla. Ecco perché . Per cliente (nodo di domanda) non si hanno archi uscenti, per cui la sommatoria è nulla.  **Ipotesi di ammissibilità** (*Condizioni di bilanciamento*)**.** Affinché il problema possa ammettere una soluzione deve essere verificata la condizione: ossia la quantità totale di prodotto disponibile deve essere uguale alla richiesta totale dello stesso.  Questo problema può essere risolto, senza simplesso e calcolo della matrice inversa, mediante il **Metodo del Nord-Ovest**,per trovare una soluzione di base ammissibile iniziale, ed il **Metodo del Ciclo,** per migliorare la soluzione ammissibile. | | |  |
| **Problema dei cammini minimi** uno-a-uno, consiste nel determinare il percorso di costo minimo da s a t in G. Le cose che cambiano sono:  - le variabili se selezioniamo (i, j), 0 altrimenti;  - i vincoli del problema sono . | |  | |
| **Problema dei cammini minimi** uno-a-tutti, consiste nel determinare l’albero dei cammini minimi da s a tutti gli altri nodi di G. Le cose che cambiano sono:  - vincoli (non esistono nodi passaggio) ; - variabili decisionali, con .  Per risolvere tale problema si utilizza l’algoritmo di ***Bellman-Ford*** o ***Dijkstra***. | |  | |
| **Problema del Flusso Massimo** consiste nel determinare la massima quantità di flusso che è possibile inviare da s a t attraverso G.  Voglio spedire da s a t la massima quantità di flusso senza violare i vincoli di ***capacità***.  - le variabili decisionali rappresentano la quantità di flusso che passa sull’arco (i, j), e devono essere , dato che la quantità di flusso non può superare la capacità dell’arco; - la funzione obiettivo è massimizzare , cioè la quantità di flusso che esce dalla sorgente s (); (*f* è la **variabile** del problema) - i vincoli sono  Dato il taglio s-t [V1, V2], la **capacità del taglio u[V1, V2]** è pari alla somma delle capacità degli archi diretti del taglio. Cioè, .  **Teorema** (**MAX FLOW – MIN CUT**). Il flusso massimo che può essere spedito dalla sorgente al pozzo su un grafo orientato G è uguale alla capacità del taglio s-t minimo di G*.* | |  | |
| **Problema Minimo Albero Ricoprente** (**Minimum Spanning Tree Problem**): Sia G = (V, E) un grafo non orientato e connesso dove ad ogni arco ei ∈ E è associato un costo ci.  Il **costo** di un albero ricoprente T di G è dato dalla somma dei costi degli archi che lo compongono. Problema: Determinare l’albero ricoprente di G di costo minimo.  - le variabili decisionali sono , per ogni (i, j) in E;  Questo problema si risolve con l’algoritmo di **Kruskal** o **Prim**. |  | | |